

Exercices à rendre (facultatifs)

31.10.24

7,2

- Possibilité d'upload vos solutions
- corrigées par des AE's
- corrigé détaillé publié sur Moodle
- marche mieux depuis un ordinateur.
- inscrivez-vous au test Intermédiaire (< 11 nov)

Rappel: 4.4.7

Théorème cool:

Soient $v_i \in W$
 $(v_1, \dots, v_p)$ ordonnés
dans cet ordre

la transformation

$$T: \mathbb{R}^p \rightarrow W \subseteq V$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

vérifie



- i) T est linéaire (exercice)
- ii) $\text{Im}(T) = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$
- iii) T est injective $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_p\}$ est lin. indépendante
- iv) T est surjective $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_p\}$ engendrent W
- v) T est bijjective $\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ est une
base (ordonnée) de W

COMBINAISON LINÉAIRE

Exemples de bases (ordonnées) 4.4.8

$$W = V = \mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$$

1) Dans $V = \mathbb{R}^n$ si l'on prend n vecteurs

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$$

alors la transfo c.o.o.L (des $\vec{a}_i$) donne

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

$$\text{or } \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = A \cdot \lambda$$

$$\text{ou } A = \left(\begin{array}{c|c|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{array} \right)_{n \times n} \text{ et } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

donc $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ forment une base ordonnée

si et seulement (d'après le thm 4.4.8)

la transfo T est bijective

chap. 2

$\Leftrightarrow$ la matrice A est inversible

$\Leftrightarrow$ les colonnes de A sont lin. indépend.
 $\uparrow$
Rég. - thm
 $\downarrow$

$\Leftrightarrow$ les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$

(i.e. le système $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution
 $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$)

1.1) la base canonique de $\mathbb{R}^n$

est le $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) =: \mathcal{E}$
n-uple

où $\vec{e}_i$ = la i ème colonne
de la matrice I_n

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{I_n}$$

I_n est inversible c'est donc une base
(ordonnée)

1.2) le thm cool dit que si

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \in \mathbb{R}^n \quad \left(\begin{array}{l} p \text{ entier} \\ p \geq 1 \end{array} \right)$$

en posant

$$A = \left(\vec{a}_1 \mid \cdots \mid \vec{a}_p \right)_{n \times p}$$

alors on a

i) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ sont lin. indépendants $\Leftrightarrow$ A possède 1 pivot par colonne
donc p pivots

ii) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ engendrent $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ A possède 1 pivot par ligne
donc n pivots

iii) $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ est une base colonnée $\Leftrightarrow$ A possède 1 pivot par ligne et par colonne
(donc $n=p$)

Suite de 4.4.8

on a donc une recette pour déterminer

si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \in \mathbb{R}^n$ $\begin{cases} \text{sont lin indep} \\ \text{engendrent } \mathbb{R}^n \\ \text{forment une base de } \mathbb{R}^n \end{cases}$

$$A = \left(\vec{a}_1 \mid \dots \mid \vec{a}_p \right) \xrightarrow[\text{échelonnage}]{\text{opélem}} R = \left(\begin{array}{c|c} \text{00} & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} \end{array} \right)$$

↑
r pivots

- s) $r = p$ les $\vec{a}_i$ sont indép.
- s) $r = n$ alors les $\vec{a}_i$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- s) $r = p$ alors $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ est une base
et $r = n$ ordonnée de $\mathbb{R}^n$

1.2
ex.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

- sont lin. indép. (3 pivots)
- n'engendrent pas $\mathbb{R}^4$ (car < 4 pivots)

1.2
ex.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{base de } \mathbb{R}^4$$

Morale (pour $\mathbb{R}^n$)

Il y a autant de bases ordonnées

$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ de $\mathbb{R}^n$

qu'il y a de matrices inversibles $n \times n$

en effet, si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, est inversible
alors ses colonnes forment une base ordonnée
d'après le thm cool.

1.2 (suite)

exemples de bases de $\mathbb{R}^n$
avec $n=1, 2, 3$

$n=1$: une base de $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

est un $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathbb{R} = \text{Vect} \{r\}$$

$n=2$: base ord. de $\mathbb{R}^2$: $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

t.q. $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$

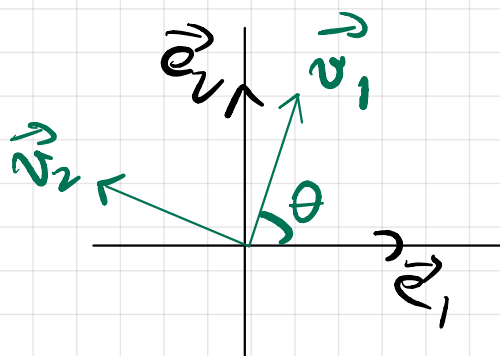
$P = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}$
parallélogramme non écrasé

sous-ex: $\theta \in \mathbb{R}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

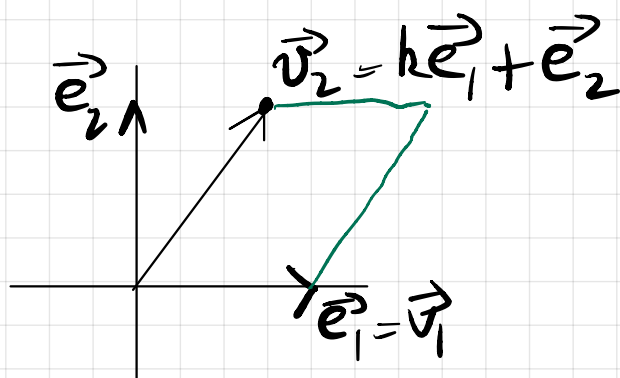
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



sous-ex

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2$$



Morale géométrique :

- les bases de $\mathbb{R}^2$ corresp. aux parallélogrammes (non aplatis) de $\mathbb{R}^2$ ayant $(0,0)$ comme sommet

pour $\mathbb{R}^3$ pareil : il y a autant de bases de $\mathbb{R}^3$ qu'il y a de parallélépipèdes non écrasés avec sommet $(0,0,0)$

ex 4.4.8

2) Base canonique de $\mathbb{P}_n$

2.1 $\mathbb{P}_n = \{ \text{pol. de degré} \leq n \text{ à coeff réels} \}$

$$\mathcal{F} = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

← $n+1$ polynômes

alors $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{P}_n$

appelée la base canonique de $\mathbb{P}_n$

Rem. générale pour $\mathbb{P}_n$

Si $\{p_1, \dots, p_r\} = \mathcal{F}$ est une famille
de polynômes $p_i \in \mathbb{P}_n \setminus \{0\}$

et si $\deg(p_i) \neq \deg(p_j) \quad \forall i, j$

alors $\mathcal{F}$ est linéaire indépendante

2.2 : $V = \mathbb{P}_3$

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{t^3+1}_{p_1}, \underbrace{t^3+t}_{p_2}, \underbrace{t^3+t^2}_{p_3} \right\}$$

$\mathcal{F}$ est-elle lin. indép?

soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

le polynôme nul

$$\lambda_1(t^3+1) + \lambda_2(t^3+t) + \lambda_3(t^3+t^2) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(développer et regrouper selon puissances)

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t^3 + \lambda_3 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

donc lin. indép.

$$3) V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4} \right\}$$

est une base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{on a bien}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \text{Vect} \{ E_1, E_2, E_3, E_4 \}$$

ex: montrer qu'elles sont lin. indép.

$$3.5) U \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

l'espace des matrices
triang. supérieures

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{F} = \{ E_1, E_2, E_4 \} \quad \text{base de } U.$$

4) la source de tous les EV

X un ensemble

$$V = \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \quad \text{esp. vect.}$$

pour tout $x \in X$ on définit

$$\delta_x : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{le Dirac en } x)$$

$$y \mapsto \delta_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x \\ 1 & \text{si } y = x \end{cases}$$

$$\delta_x \in V$$

alors la famille

$$\mathcal{D} = \{ \delta_x \mid x \in X \}$$

est une
base
de $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$

5) (ex 4.4.8 suite)

$$\text{Si } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$\text{et } T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(T_A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im}(A) = \text{Col}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A\vec{x} = y \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Pour trouver une base de $\text{Ker}(A)$:

- résoudre le syst. $A\vec{x} = \vec{0}$
- exprimer l'ens. sol. en fonction des variables libres (celles sans pivot) (secondaires)

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = r_1 \vec{y}_1 + \dots + r_s \vec{y}_s \}$$

les variables libres
sont pivots pour A

alors les $\vec{y}_i$ forment
une base de $\text{Ker}(A)$

ex : $S = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 - x_4 \end{matrix} \right\}$

var. liées var. libres

on écrit

$$\vec{x} \in S \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2}$$

base de $\text{Ker}(A)$: $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$

ex : Base de $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 0\} = H$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}_3}$$

base de H : $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$

Base de $\text{Im}(A) = \text{Col}(A)$:

indication: regarder les colonnes et "jeter"
les colonnes superflues
càd trouver le plus grand
nombre de colonnes linéairement
indépendantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 \quad \vec{c}_3$

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) &= \text{Vect}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\} \\ &= \text{Vect}\{\vec{c}_1, \vec{c}_3\} \end{aligned}$$

$$\vec{c}_2 = 2\vec{c}_1$$

c_1 et c_3 sont
lin. indep.

base de $\text{Im}(A)$: $\{\vec{c}_1, \vec{c}_3\}$
 $\{\vec{c}_2, \vec{c}_3\}$

recette plus précise la semaine pro.

Fin ex. 4.4.8.

§ 4.5 Syst. de coord. et matrice de changement de coord.

Def. 4.5.1 : Si $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p)$
est une base ord. de V

alors l'app. $T: \mathbb{R}^p \rightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p$$

est bijection

Donc, $\forall v \in V$, il existe un unique

p -uplet $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = v \quad \text{càd} \quad v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p$$

On appelle les λ_i , les composantes de v
dans la base B

$$\text{et on écrit } [v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

(Def 4.5.1 suite)

$$T: \mathbb{R}^p \rightarrow V$$

T étant bijective, il existe une transfo inverse

$$T^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$v \mapsto [v]_B$$

Cette transfo est appelée la transformation
coordonnées
(dans B)

ex 4.5.2 :

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right) \text{ b.o. de } \mathbb{R}^3$$

soit $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ trouver $[x]_B$

↑
exprimo
dans la base canonique

Sol : on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

$$\text{càd } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ système linéaire

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{réduction}}$$
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= -3 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } [x]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{càd } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def. 4.5.3 : Soit $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ $b_i \in \mathbb{R}^n$
base ordonnée de $\mathbb{R}^n$

$$\text{Soit } P_B = (\vec{b}_1 \mid \dots \mid \vec{b}_n)_{n \times n}$$

= la matrice de changement
de coordonnées de B

à $\mathcal{E}$ = la base canonique de $\mathbb{R}^n$

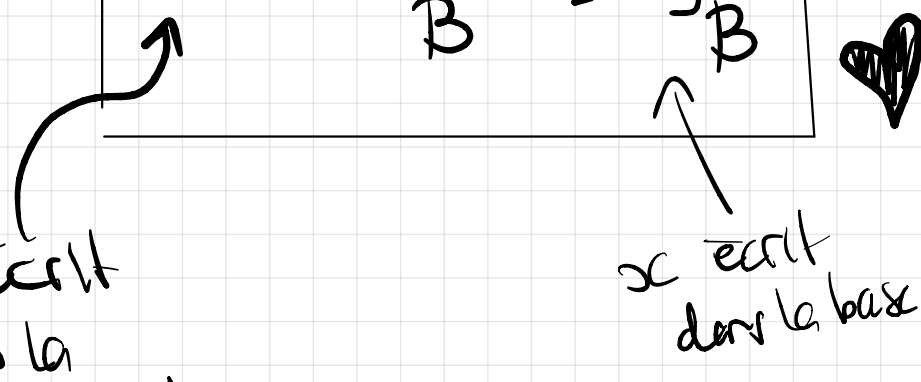
qui a la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

on a

$$x = P_B \cdot [x]_B$$

x écrit dans la base canonique

x écrit dans la base B



Rem. 4.5.4 : Comme B est une base de $\mathbb{R}^n$
 P_B est inversible et donc

donne

$$x = P_B \cdot [x]_B$$

$$P_B^{-1} \text{ (à droite)}$$

$$P_B^{-1} x = [x]_B$$



Formule de chang. de base de E vers B .